DEFINICION: Son **ecuaciones de segundo grado o cuadráticas**, aquellas en las que la variable independiente x, aparece al menos una vez elevada al cuadrado. **(x^2)**

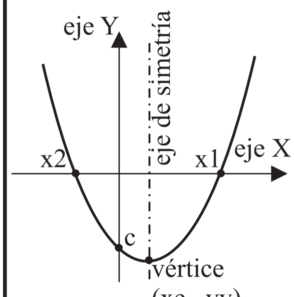
La ecuación general de segundo grado es:

$$y = ax^2 + bx + c$$

donde :

y es la VARIABLE DEPENDIENTE
x es la VARIABLE INDEPENDIENTE
a es el coeficiente cuadrático
b es el coeficiente lineal
c es el término independiente
b.x es el término lineal

La representación gráfica de este tipo de ecuaciones nos dan como resultado una curva llamada PARABOLA de 2º grado.



Toda parábola tiene:

Un EJE DE SIMETRÍA que se ubica a una distancia **xe** del eje y, un VÉRTICE, que es el máximo (o mínimo) valor que puede tomar la función y se ubica sobre el eje de simetría, a una distancia **yv** del eje X.

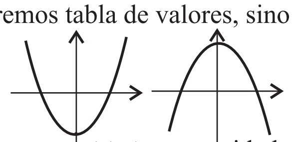
Un valor llamado ORDENADA AL ORIGEN que es el punto donde la parábola corta al eje Y, y su valor coincide con el término independiente **c** y dos puntos, **x1** y **x2** llamados RAÍCES O CEROS de la ecuación, que es el lugar geométrico donde la parábola corta al eje X.

ANALISIS DE UNA FUNCION CUADRATICA Y TRAZADO DE LA PARABOLA:

Para trazar la parábola no utilizaremos tabla de valores, sino que para ello, realizaremos el análisis de la función siguiendo el siguiente procedimiento:

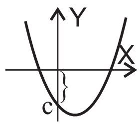
1) CONCAVIDAD:

Es determinada por el signo del coeficiente cuadrático **a**. Si **a>0** será positiva y si **a<0** será negativa.



2) ORDENADA AL ORIGEN:

Coincide con el término lineal.
Se ubica el valor de c sobre el eje Y

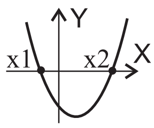


3) OBTENCION DE LAS RAICES:

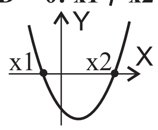
Mediante la fórmula resolvente, se obtienen los valores de x1 y x2.

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt[2]{b^2-4ac}}{2a}}$$

El término bajo la raíz:
D= b^2-4ac se denomina DISCRIMINANTE. De acuerdo al signo del mismo, se puede saber de que tipo serán las raíces de la ecuación:

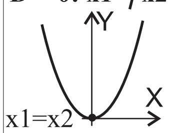


D > 0: x1 ≠ x2



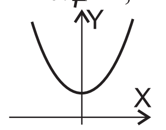
Se obtienen **dos raíces** reales distintas. La parábola corta al eje X en **dos puntos**.

D = 0: x1 = x2



Se obtienen **dos raíces** reales iguales (raíz doble). La parábola toca al eje X en **un punto**.

D < 0: ∄ x1; x2



No se pueden calcular las raícen en R. La parábola **no corta** al eje X.

La fórmula que permite obtener las raíces, se obtiene igualando la ecuación general a 0 (en el eje x, y=0):

$ax^2 + bx + c = 0$ sabiendo que siempre a es distinto de 0.

Luego se pasa c: $ax^2 + bx = -c$

Se dividen todos los términos por a: $\frac{\cancel{a}x^2}{\cancel{a}} + \frac{bx}{a} = \frac{-c}{a}$

Se suma a ambos miembros, el término $b^2/4a^2$: $x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = -c + \frac{b^2}{4a^2}$

En el miembro izquierdo se aplica $(a^2+2ab+b^2)=(a+b)^2$.
En el miembro derecho se saca denominador común:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{+b^2-4ac}{4a^2}$$

Se pasa el cuadrado como raíz: $x+\frac{b}{2a} = \pm\sqrt[2]{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

Se despeja la x: $x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt[2]{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

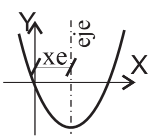
Se distribuye la raíz y se simplifica el denominador: $x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt[2]{b^2-4ac}}{\cancel{\sqrt[2]{4a^2}}\ 2a}$

Se saca denominador común, y se obtiene la fórmula final: $\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt[2]{b^2-4ac}}{2a}}$

De ésta fórmula se obtienen las 2 raíces: una sumando (x1) y la otra restando (x2).

4) POSICION DEL EJE DE SIMETRÍA:

Mediante la ecuación: **xe=-b/2a**, que se obtiene realizando un promedio entre las raíces x1 y x2, se determina la distancia del eje de simetría al eje Y.

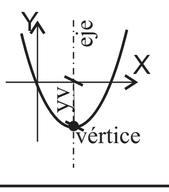


POSICION DEL EJE: El eje por ser de simetría, será equidistante de ambas raíces. Por lo tanto la posición del eje se puede obtener como promedio de las dos raíces: **xe=(x1+x2)/2.** Reemplazando por la fórmula resolvente y simplicando:

$$xe= \frac{\frac{-b+\cancel{\sqrt[2]{-b^2+4ac}}}{2a} - \frac{b-\cancel{\sqrt[2]{-b^2+4ac}}}{2a}}{2} = \frac{-b-b}{4a} = \boxed{\frac{-b}{2a}}$$

5) POSICION DEL VERTICE:

Mediante la ecuación: $yv = \frac{-b^2}{4a} + c$ que se obtiene colocando como valor de la variable independiente la ecuación de la posición del eje en la ecuación general, se obtiene la distancia entre el vértice y el eje X.



POSICION DEL VERTICE: Reemplazando xe en la ecuación general $y=ax^2+bx+c$ se obtiene:

$$yv = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b^2\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = \cancel{a}\frac{b^2}{4a^{\cancel{2}}} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{-2b^2+b^2}{4a} + c = \boxed{\frac{-b^2}{4a} + c =}$$

Conociendo el signo de la concavidad, la determinación de los puntos correspondientes a la ordenada al origen, las raíces, el eje y el vértice, se puede trazar la parábola.

ANALIZAR Y GRAFICAR LA FUNCION $y = x^2 + 5x + 6$

1º) Se determinan los valores de los coeficientes: a=1; b=5 y c=6.
2º) Se determina la concavidad: a>0 por lo tanto será positiva:
3º) Se determina la ordenada al origen: c=6 (corta al eje y en +6)
4º) Se calculan las raíces reemplazando los valores de a, b y c en la fórmula resolvente:

$$x1,x2 = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2-4.1.6}}{2.1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

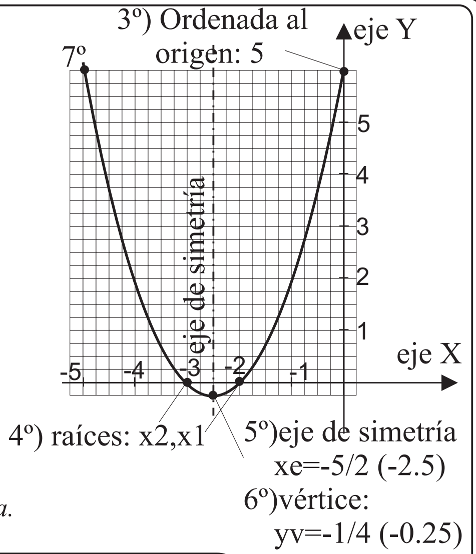
$$x1 = \frac{-5+1}{2} = -2 \qquad x2 = \frac{-5-1}{2} = -3$$

el discriminante es 1 (mayor que 0) por lo tanto hay **2 raíces reales y distintas**

5º) Se determina la posición del eje: 6º) Se determina la posición del vértice:

$$xe = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{2.1} = \frac{-5}{2} \qquad yv = \frac{-5^2}{4.1} + 6 = \frac{-25}{4} + 6 = \frac{-25+24}{4} = \frac{-1}{4}$$

7º)Se ubica el punto de simetría respecto a c.
Cumplidos los 7 pasos, se obtienen los puntos necesarios para trazar la parábola.



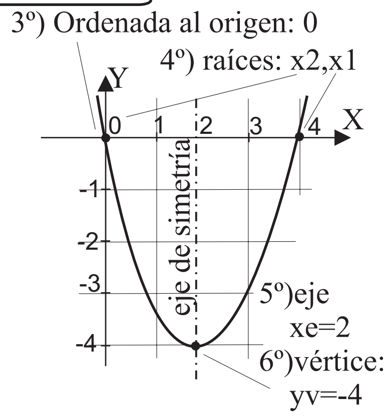
ECUACIONES INCOMPLETAS:

Son aquellas donde falta el término linealy/o el término independiente. (b=0;c=0)

ANALIZAR Y GRAFICAR LA FUNCION $y = x^2 - 4x$

Esta función es incompleta, ya que falte el término independiente.
1º) Se determinan los valores de los coeficientes: a=1;b=-4 y c=0
2º) Se determina la concavidad: a>0 por lo tanto será positiva:
3º) Se determina la ordenada al origen: c=0 (corta al eje y en el origen: 0)
4º) Se calculan las raíces. Se puede usar el método de la resolvente, o bien se puede aplicar el siguiente método: en el primer miembro de la ecuación $\mathbf{x^2 - 4.x = 0}$ se extrae factor común x: $\mathbf{x.(x - 4) = 0}$. Para que el resultado del producto sea 0 debe ocurrir que $\mathbf{x = 0}$ (o sea que la primera raíz es $\mathbf{x1 = 0}$); o que $\mathbf{x - 4 = 0}$. Despejando de esta última: $\mathbf{x = 4}$ (la segunda raíz es $\mathbf{x2 = 4}$).
5º) Se determina la posición del eje: 6º) Se determina la posición del vértice

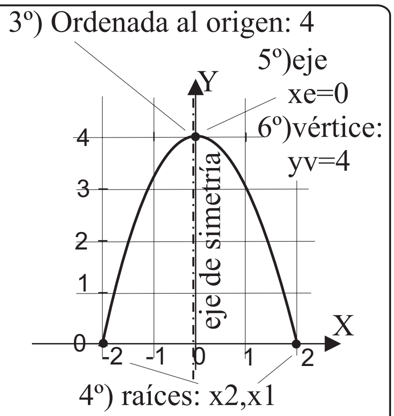
$$xe = \frac{-(-4)}{2.1} = \frac{4}{2} = 2 \qquad yv = \frac{-(-4)^2}{4.1} + 0 = \frac{-16}{4} = -4$$



ANALIZAR Y GRAFICAR LA FUNCION $y = -x^2 + 4$

Esta función es incompleta, ya que falte el término lineal.
1º) Se determinan los valores de los coeficientes: a=-1;b=0 y c=4
2º) Se determina la concavidad: a<0 por lo tanto será negativa:
3º) Se determina la ordenada al origen: c=4 (corta al eje en 4)
4º) Se calculan las raíces. Se puede usar el método de la resolvente, o bien se puede aplicar el siguiente método: se pasa al segundo miembro de la ecuación el término cuadrático: $\mathbf{4 = x^2}$. Luego, pasando la potencia como raíz, se pueden obtener los valores de las dos raíces: $\mathbf{\sqrt{4} \Rightarrow x1 = 2; x2 = -2.}$
5º) Se determina la posición del eje: 6º) Se determina la posición del vértice

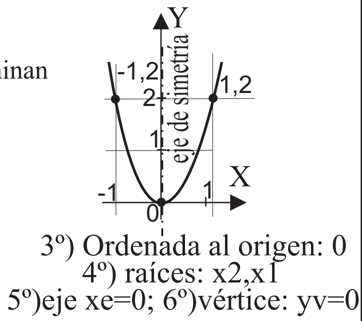
$$xe = \frac{0}{-1.1} = 0 \qquad yv = \frac{-(0)^2}{-1.1} + 4 = 0 + 4 = 4$$



ANALIZAR Y GRAFICAR LA FUNCION $y = 2x^2$

Esta función es incompleta, ya que falte el término lineal y el término independiente. eterminan los valores de los coeficientes: a=2;b=0 y c=0
2º) Se determina la concavidad: a<0 por lo tanto será positiva:
3º) Se determina la ordenada al origen: c=0 (corta al eje en el origen 0)
4º) Se calculan las raíces. Se puede usar el método de la resolvente, o bien observando la ecuación $\mathbf{0 = 2x^2}$, solo hay un valor de x que la anula y es x = 0. por lo tanto hay una raíz doble y es $\mathbf{x1 = x2 = 0}$
5º) Se determina la posición del eje: 6º) Se determina la posición del vértice

$$xe = \frac{0}{2.1} = 0 \qquad yv = \frac{-(0)^2}{2.1} + 0 = 0$$



7º)Dado que solo hay un punto para trazar la parábola, hay que recurrir a una tabla de valores:
Solo basta con 1 punto mas: si x=1; y=2. Luego se busca el simétrico que será: x=-1;y=2

1) COMPLETAR LA TABLA:

Ultimos tres números del DNI del alumno: | | | | = | L | M | N |

ECUACION:	coeficientes			¿es completa?	conca-vidad	valor del discriminante	tipo de raíces: (2 raíces reales, 1 raíz doble o no existen raíces)	raíces		eje simetría	vértice
	a	b	c	si/no	+/-	$D= b^2-4ac$		x1	x2	$xe=-b/2.a$	$yv=-b^2/4.a+c$
$2x^2 + 4x - 6 = 0$											
$4x^2 -8x = 0$											
$6x^2 - 9 = 0$											
$3x^2 + 6x - 9 = 0$											
$5x^2 - 12x + 8 = 0$											
$-8x^2 + 8x - 2 = 0$											
$Lx^2 = 0$											
$-3x^2 + 12 = 0$											
$-4x^2 + 25 = 0$											
$Lx^2 - Mx + N =0$											
$Mx^2 - Nx = 0$											

ANALIZAR Y GRAFICAR LA FUNCION $y = -x^2 + 2.x +3$

1º) a=____;b=____ y c=___0. 2º) Concavidad: a___0 =>__________

3º) Ordenada al origen: _____ 4º) Cálculo de raíces:

5º)Posición del eje:

6º)Posición del vértice:

ANALIZAR Y GRAFICAR LA FUNCION $y = 2x^2 + N$ {N=último dígito de su DNI(0a9)}

1º) a=____;b=____ y c=___0. 2º) Concavidad: a___0 =>__________

3º) Ordenada al origen: _____ 4º) Cálculo de raíces:

5º)Posición del eje:

6º)Posición del vértice:

ANALIZAR Y GRAFICAR LA FUNCION $y =x^2 + N.x$ {N=último dígito de su DNI(0a9)}

1º) a=____;b=____ y c=___0. 2º) Concavidad: a___0 =>__________

3º) Ordenada al origen: _____ 4º) Cálculo de raíces:

5º)Posición del eje:

6º)Posición del vértice:

Si es necesario utilice tabla de valores

PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN CON ECUACIONES CUADRÁTICAS:

Los siguientes ejercicios son planteamientos que generan una ecuación de segundo grado. Primero debe plantearse la lógica del problema, llamando x a una de las variables que el problema establece; luego deben escribirse las relaciones entre la variable, de acuerdo al planteamiento y finalmente, se resuelve la ecuación.

1) La suma de dos números es 10 y la suma de sus cuadrados es 58. Halle ambos números.

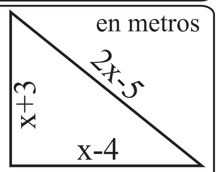
Asignamos **x al primer número**. Como **la suma de ambos es 10**, el otro será **10 – x**. La condición final del problema establece que la suma de los cuadrados de ambos números resulta 58, entonces: $\mathbf{x^2 + (10 - x)^2 = 58}$. Para resolver esta ecuación y llegar a la ecuación general de 2º grado, hay que resolver el cuadrado del binomio $(a - b)^2 = a^2 - 2.a.b + b^2$ Desarrollando la ecuación se tiene: $\mathbf{x^2 + 10^2 - 2.10.x + x^2 = 58 \Rightarrow 2x^2 + 100 - 20.x = 58}$. Pasando el 58 restando al primer miembro: $\mathbf{2x^2 - 20x + 42 = 0}$. Se puede dividir toda la ecuación por 2 quedando, $\mathbf{x^2 - 10x + 21 = 0}$. Resolviendo: $\mathbf{x_1 = 3}$ y $\mathbf{x_2 = 7}$. Aparentemente hay dos soluciones. Hay que probar con ambas. Con la primera el primer número es **3** (x = 3) y el segundo número **7** (10-3). Con la segunda, el primer número es **7** (x = 7) y el segundo **3** (10 – 7). Considerando cualquiera de los dos casos la respuesta es la misma. Si verificamos la suma de los cuadrados: $\mathbf{3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58}$.

Los números buscados son 3 y 7.

2)El largo de una sala rectangular es 3 metros mayor que el ancho. Si el ancho aumenta 3 m y el largo aumenta 2 m, la superficie se duplica. Hallar e el área original de la sala.

Este problema la x se puede colocar en cualquiera de las dos incógnitas, largo o ancho. Supongamos: ancho de la sala: x; l largo de la sala: x + 3. La superficie de la sala será: x.(x + 3). Estos son los datos iniciales. Según el enunciado, el ancho aumenta en 3 metros y el largo aumenta en 2 metros, así que, luego del aumento quedan: nuevo ancho: (x + 3); nuevo lar go: (x + 5). La superficie será (x + 3).(x + 5). La condición entre las superficies es que la nueva duplica a la inicial, por lo tanto, se puede plantear la siguiente ecuación: **(x + 3).(x + 5)= 2.x.(x + 3).** Efectuando las multiplicaciones quedará: $x^2 + 5x + 3x + 15 = 2x^2 + 6x$. Pasando todo al primer miembro: $x^2 + 5x + 3x + 15 - 2x^2 - 6x = 0$. Simplificando se obtiene la cuadrática: $\mathbf{-x^2 + 2x + 15 = 0}$. Resolviendo: $\mathbf{x_1 = 5}$ **y** $\mathbf{x_2 = -3}$. La solución x = -3 se desecha, ya que x es el ancho de la sala y no puede ser negativo. Por lo tanto el ancho original era **5 metro**s. Según las condiciones iniciales se deduce que el largo era de 5 + 3 = 8 metros. La respuesta será que ***el área original era de 8m.5m = 40 m²***.

3)Hallar el perímetro y la superficie del triángulo (ver figura).



Como el triángulo es rectángulo, se cumple el Teorema de Pitágoras: "El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos". La hipotenusa es el lado mayor **(2x-5)** y los otros dos son los catetos. Se plantea entonces la ecuación: $(x + 3)^2 + (x - 4)^2 = (2x - 5)$ Desarrollando cada binomio al cuadrado: $x^2 + 2.3.x + 3^2 + x^2 - 2.4.x + 4^2 = (2x)^2 - 2.(2x).5 + 5^2 = x^2 + 6x + 9 + x^2 - 8x + 16 = 4x^2 - 20x + 25$ Reagrupando: $x^2 + 6x + 9 + x^2 - 8x + 16 - 4x^2 + 20x - 25 = 0$ Finalmente: $\mathbf{-2x^2 + 18x = 0}$

Las raíces de la ecuación son $\mathbf{x_1 = 0}$ y $\mathbf{x_2 = 9}$. La solución x = 0 se desecha, ya que entonces un cateto sería -4 m, lo cual no es posible. La solución es entonces, **x = 9**. De esta manera, el triángulo queda con catetos 12 metros y 5 metros y con hipotenusa 13 metros. La superficie de un triángulo es base por altura sobre 2; la base y la altura son los dos catetos, por lo tanto la superficie será: $\mathbf{A = 12 . 5 / 2 = 30\ m^2}$. El perímetro es la suma de los lados, **P = 12 m + 5 m + 13 m = 30 m**

La superficie es de 30 m² y el perímetro de 30 m.

NOTA: Para resolver los problemas debe utilizar los tres últimos números de su DNI. Ej. si sus tres últimos números son **071**; se asignará **M=0, N=7 y P=1**. Si los tres dígitos son igual a 0, consulte al profesor.

1) Hallar los lados y el perímetro de un rectángulo sabiendo que la base es igual a (x+**M**), la altura a (x+**P**) y la superficie es igual a **MNP**.

RTA:

2) La suma de dos números es igual a 12 y su producto igual a **MP**. ¿Cuáles son esos números?

RTA:
